EXERCICE N°2 :	60'	7 points	

I– Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x)=\dfrac{e^{2x}}{1+e^{2x}}$ et soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (**unité : 2cm**).

1°) a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement les résultats.

b) Montrer que pour tout réel x on a : $f'(x)=\dfrac{2e^{2x}}{(1+e^{2x})^2}$.

Dresser le tableau de variation de f.

c) Montrer que le point $I\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ est un centre de symétrie de $\mathscr{C}$.

d) Donner une équation cartésienne de la tangente (T) à $\mathscr{C}$ au point I.

2°) a) Montrer que pour tout réel t on a : $f'(t)\le\dfrac{1}{2}$.

b) En intégrant les deux membres de l'inégalité précédente, montrer que pour $x\ge 0$ on a :

$f(x)\le\dfrac{1}{2}(x+1)$

c) Déterminer alors la position de $\mathscr{C}$ par rapport à (T).

3°) Tracer (T) et $\mathscr{C}$ dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

4°) a) Montrer que f est une bijection de IR sur $]0,1[$.

b) Soit $y\in]0,1[$. Déterminer le réel x tel que $f(x)=y$.

c) En déduire la représentation graphique dans le même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ de la fonction g définie sur $]0,1[$ par : $g(x)=\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{x}{1-x}\right)$

II– On considère la suite (I_n) définie pour tout entier naturel non nul n par : $I_n=\int_{-1}^{0}\dfrac{e^{2nt}}{1+e^{2t}}dt$.

1°) a) Montrer que (I_n) est décroissante et positive.

b) En déduire que (I_n) est convergente.

2°) Montrer que pour tout naturel non nul n, on a : $I_n\le\dfrac{1}{2n}$.

3°) Trouver la limite de I_n quand n tend vers l'infini.

Qarray.tn -Aqra Blech- Qarray.tn